Fit in Mathe

April 2013 Klassenstufe 12

Thema **Matrizen**

❶ Führe folgende Matrizenoperationen durch

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot 2 =$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 7 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & -7 & 8 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} =$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} =$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} =$

Die Summe der maximalen Beträge der Elemente aller 5 Ergebnismatrizen ist ___.

❷ Gegeben sind die folgenden (m x n)-Matrizen. Schreibe sie explizit!

a) $(a_{i\,j}) = (i+j)$ mit $m=3$, $n=4$ und $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$

b) $(b_{i\,j}) = (i^j)$ mit $m=4$, $n=3$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$

c) $(c_{i\,j}) = \delta_{i\,j}$ mit $\delta_{i\,j} = \begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$ und $m=n=4$

Die Summe der maximalen Beträge der Elemente aller 3 Ergebnismatrizen ist ___ .

❸ Unter der <u>transponierten</u> Matrix einer Matrix A versteht man die Matrix A^T , bei der die Zeilen spaltenweise und die Spalten zeilenweise geschrieben werden.

a) Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix}$

Wie sehen die jeweiligen transponierten Matrizen aus?

b) Beweise, dass gilt $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Jedes Element der Produktmatrix besteht aus ___ Summanden.

❹ Eine Matrix mit derselben Anzahl von Zeilen und Spalten ist eine <u>quadratische</u> Matrix. Eine spezielle (hier mit der Zeilen- und Spaltenzahl zwei) ist die Einheitsmatrix $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. <u>Regulär</u>, <u>nicht-singulär</u> oder auch <u>invertierbar</u> genannte Matrizen A sind solche, für die es eine <u>inverse</u> Matrix A^{-1} gibt mit der Eigenschaft $A \cdot A^{-1} = I$

Finde durch die Aufstellung eines entsprechenden Gleichungssystems die inverse Matrix (falls vorhanden) zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Der kleinste gemeinsame Nenner aller Elemente von A^{-1} ist ___.

Fit in Mathe

April 2013 Klassenstufe 12

❺ Materialverflechtung

Beim Bau dreier Carporttypen werden für die Zwischenprodukte folgende Rohstoffe benötigt:

	Kanthölzer	Dachbalken	Bretter	Dachlatten
Fichtenstämme (m^3 *pro Stück*)	0,03	0,05	0,02	0,01
Imprägniersalz (*Liter pro Stück*)	0,17	0,3	0,1	0,05

Für die Endprodukte sind folgende Zwischenprodukte nötig:

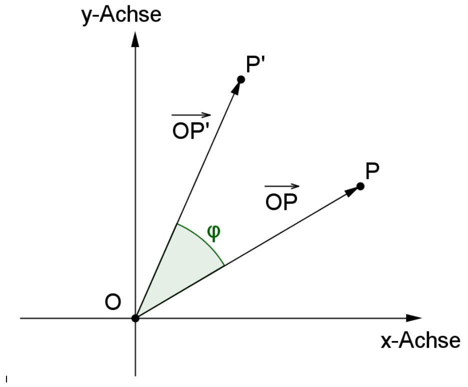
	Typ I	Typ II	Typ III
Kanthölzer (*Stück pro Produkt*)	8	10	14
Dachbalken (*Stück pro Produkt*)	4	4	5
Bretter (*Stück pro Produkt*)	60	160	240
Dachlatten (*Stück pro Produkt*)	12	12	24

a) Welche Rohstoffmengen werden für die einzelnen Typen benötigt?
b) Es liegt eine Bestellung vor mit 20 Stück Typ I, 15 Stück Typ II und 5 Stück Typ III. Welche Rohstoffmenge an Fichtenstämmen und Imprägniersalz ist insgesamt erforderlich?
Im Mittel benötigt man bei dieser Bestellung ganzzahlig gerundet pro Carport ___ l Imprägniersalz

Die Lösungszahlen in willkürlicher Reihenfolge sind:	78	20	5	20	72

❻ Expertenaufgabe

Ein Ortsvektor $\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wird mit dem Koordinatenursprung als Drehpunkt um den Winkel φ gedreht. Das Ergebnis ist der neue Ortsvektor $\vec{OP}\,'$.
Man kann die Drehung darstellen als die Multiplikation des ursprünglichen Ortsvektors mit einer Matrix A.



Wie sieht die Matrix A aus ?