



Fit in Mathe

Mai 2013

Klassenstufe 11

Thema

Ableitung

① Bilde den Differenzenquotienten $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ folgender Funktionen an der Stelle x_0 und ermittle den Grenzwert $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

- a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 2$
c) $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x_0 \neq 0$ d) $f(x) = 2x^2 - 2x^{-2}$

Die Summe der $f'(1)$ für alle 4 Funktionen ist ____.

② Der Differenzenquotient der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ ist $\frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h}$.

Ermittle die Ableitung der Funktion für ein $x_0 > 0$.
(Tipp: Erweitere Zähler und Nenner mit $(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0})$)

Der Betrag des Grenzwertes an der Stelle $x_0 = 0,25$ ist ____.

③ Überprüfe, ob die folgenden Funktionen an der bezeichneten Stelle ableitbar sind!

- a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{für } x \geq 0 \\ x^2 & \text{für } x < 0 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 0$
b) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{für } x < 0 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 0$
c) $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 4x + 7 & \text{für } x \geq 1 \\ -x^2 + 4x - 1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$ an der Stelle $x_0 = 1$
d) $f(x) = |x|$ an der Stelle $x_0 = 0$

Die Summe der Beträge aller existierenden Grenzwerte ist ____.

④ Bestimme die Stellen x_0 der Funktion $f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 1$, an denen die Steigung 1 ist.

Die Summe der Beträge der gesuchten x_0 ist ____.

⑤ Wie lauten die Koeffizienten der ganzrationalen Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, die im Punkt $P(2|-4)$ die Ableitung -3 hat und die Achsen in $x=4$ und $y=4$ schneidet.

Die Summe aller Koeffizienten ist ____.

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.



Fit in Mathe

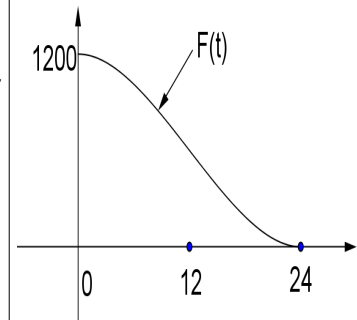
Mai 2013

Klassenstufe 11

- 6 Wie groß muss b gewählt werden, damit sich die Kurven $y_1 = x^2 - b$ und $y_2 = -x^2 + b$ unter rechten Winkeln schneiden.

Der Abstand der Schnittpunkte zueinander ist ____.

- 7 Ein Wasserwerk muss einen Speicher für einen Tagesbedarf auslegen. Dieser beträgt 1200 m^3 . Die Beobachtung zeigt, dass um 0 h keine Entnahmen stattfinden, diese dann aber über den Tag gleichmäßig bis zu einer maximalen Entnahme um 12 h ansteigen und dann bis 24 h wieder allmählich auf Null abnehmen. Beschreibe den Füllstand des Wasserbehälters mit diesen Angaben durch ein Polynom $F(t)$ möglichst kleinen Grades! Jetzt soll eine Pumpe während der Entnahme gleichmäßig über 24 Stunden den Tagesbedarf wieder hinzupumpen. Wie ist jetzt der Füllstandsverlauf $F_2(t)$? Welches maximale Fassungsvermögen benötigt man für den Speicher (auf Zehner aufgerundet)?



Der Nenner des gekürzten Koeffizienten bei t^3 ist ____.

Die Lösungszahlen in willkürlicher Reihenfolge sind: 0 1 4 72 16 0 1

8 Expertenaufgabe

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung lautet:

Wenn eine Funktion f in $(a; b)$ differenzierbar ist und in $[a; b]$ stetig, dann existiert mindestens ein c zwischen a und b , so dass

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ mit } c \in (a; b) .$$

Diesen Satz kann man auch so umschreiben:

Die Steigung, die eine Gerade durch die Punkte des Graphen an den Intervallgrenzen hat, wird innerhalb des Intervalls auch mindestens einmal angenommen.

Beweise unter Zuhilfenahme dieses Satzes die Aussage:

Eine Funktion, deren Ableitung für alle Punkte eines Intervalls 0 ist, muss konstant sein.

Ermittle die Ableitung folgender Funktionen $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ und $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

Was fällt auf? Warum kann man schließen, dass sich beide Funktionen nur um eine Konstante unterscheiden?

Wer am Ende seiner Schulzeit alle "Fit in Mathe"-Aufgabenblätter eigenständig und erfolgreich bearbeiten kann, erfüllt unsere Erwartungen an die Mathematikkompetenzen unserer Studienanfänger. Die mathematischen Voraussetzungen für einen erfolgreichen Studieneinstieg an unserer Hochschule sind damit gegeben.